生物工学演習E -第13回-

今回の概要

定常確率過程のパワースペクトル密度関数は自己共分散関数のフーリエ変換により計算できる (Wiener–Khinchin theorem).

13.1

次の関数 $x(t)$ に関して，以下の問いに答えよ．

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & |t| < a(\text{ただし } a > 0) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(1) 関数 $x(t)$ の Fourier 変換 $X(\omega)$ を求めよ．

(2) エネルギースペクトル密度関数 $|X(\omega)|^2$ を計算し，概形を図示せよ．

(3) 関数 $x(t)$ の標本自己共分散関数を計算せよ．ただし，時系列の標本自己共分散関数を $\hat{R}_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau)dt$ とする．

(4) 求めた標本自己共分散関数のフーリエ変換を計算し．上記で求めたエネルギースペクトル密度関数と一致することを確認せよ．

13.2

離散ホワイトガウシアンノイズ $X_t \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(\mu, \sigma^2), t = 1, 2, \ldots$ に関して以下の問いに答えよ．

(1) ランダム信号 X_t の自己共分散関数を計算し，図示せよ．

(2) ホワイトガウシアンノイズのパワースペクトル密度関数を計算せよ．

(3) その結果が意味することをホワイトガウシアンノイズに含まれる周波数成分に着目して答えよ．

13.3

次の信号 $x_{t+1} = 0.5 * x_t + \zeta_t$, $x_0 = 0$, $\zeta_t \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0,1)$ に関して，以下の問いに答えよ．

(1)　信号 x_t の自己共分散関数を計算せよ．その際，$t \to \infty$ と仮定せよ．

(2)　信号 x_t のパワースペクトル密度関数を計算せよ．